DETERMINAN MATRIKS

Definisi Matriks

- **Matriks** adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan yang diatur berdasarkan baris (row) dan kolom (column).
- Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan **entri** dalam matriks atau disebut juga **elemen** atau **unsur**.
- Ukuran (ordo) matriks menyatakan banyaknya baris dan kolom pada matriks tersebut

DETERMINAN

Setiap matriks bujur sangkar A yang berukuran (nxn) dapat dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut determinan matriks tersebut dan ditulis dengan det(A) atau |A|.

Untuk menghitung determinan ordo n terlebih dahulu diberikan cara menghitung determinan ordo 2

ATURAN SARRUS

- $A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ - \qquad\qquad + \end{array}$

  $Det(A_1) = (a_{11}.a_{22}) – (a_{12}.a_{21})$

- $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccccc} \left[a_{11} \right. & a_{12} & \left. a_{13} \right] & a_{11} & a_{12} \\ \left[a_{21} \right. & a_{22} & \left. a_{23} \right] & a_{21} & a_{22} \\ \left[a_{31} \right. & a_{32} & \left. a_{33} \right] & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - \quad + & + & + \end{array}$

  $Det(A_2) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} –$
  $(a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33})$

ATURAN SARRUS

- M = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ Det(M) = 3.-2 – (1.4) = -10

- K = $\begin{array}{ccc} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \end{array}\right] & \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} & \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \end{array}$ Det(K) = 3.2.5+2.3.4+2.1.4- (2.2.4 + 3.3.4 + 2.1.5)
  = 30 + 24 +8 – (16+36+10) = 62 – 62 = 0

- Pertanyaan: Apakah metode di atas dapat diterapkan pada matriks 4x4, 5x5 dst?

Determinan Matriks

- JIka $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ maka:
- det(A)= $a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{23} -$

  $a_{13}a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

  atau

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{array} \right.$$

Contoh

Tentukan determinan matriks

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\det(B) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & -2 \end{array} \right.$$

$$= \boxed{(3)(1)(1)} + \boxed{(2)(0)(-2)} + \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(-1)(1)(-2)} - \boxed{(3)(0)(-2)} - \boxed{(2)(1)(1)}$$

$$= 3 + 0 + 2 - 2 - 0 - 2$$

$$= 1$$

MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR

Untuk keperluan menghitung ordo n dengan n≥3 perlu lebih dahulu definisikan pengertian minor dan kofaktor sbb :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Minor M_{ij} adalah determinan matriks *A* dihapus baris ke i kolom ke j.

Kofaktor C_{13} adalah $(-1)^{i+j} M_{ij}$

$$M_{ij} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1j} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots a_{2j} \ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots\ldots a_{ij} \ldots\ldots a_{in} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nj} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

2 Metode Minor-Kofaktor

Misalkan, A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan cara menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j.

Minor matriks A_{ij} diberi notasi M_{ij}, dengan $M_{ij} = \det A_{ij}$.

Kofaktor matriks A_{ij} diberi notasi C_{ij}, dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Sehingga, diperoleh rumus determinan Matriks A, yaitu:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$, untuk sembarang kolom j ($j = 1, 2, \ldots, n$)

Atau

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$, untuk sembarang baris i ($i = 1, 2, \ldots, n$)

dengan a_{ij} = elemen matriks A_{ij}

Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beberapa definisi yang perlu diketahui :

- M_{ij} disebut **Minor- *ij*** yaitu determinan matriks A dengan menghilangkan baris ke_i dan kolom ke-j matriks A.

  Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ maka } M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Contoh

Hitunglah Det(A) dengan ekspansi kofaktor :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Misalkan, kita akan menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor ***sepanjang baris ke-3***

- C_{ij} Matrik dinamakan **kofaktor - *ij*** yaitu $(-1)^{i+j} M_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maka

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 (2 - 0)$$

$$= -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 2} \end{pmatrix} \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}c_{3j} = a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33}$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\big((1)(1) - (0)(2)\big) = 1 - 0 = 1$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\big((2)(1) - (0)(1)\big) = -1(2 - 0) = -2$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\big((2)(2) - (1)(1)\big) = 4 - 1 = 3$$

$$\det(A) = 0(1) + 1(-2) + 2(3) = 0 - 2 + 6 = 4$$

- **Metode Minor-Kofaktor**

Berdasarkan rumus minor-kofaktor di atas, determinan matriks A dapat dicari dengan menghitung jumlah seluruh hasil kali antara kofaktor matriks bagian dari matriks A dengan elemen-elemen pada salah satu baris atau kolom matriks A. Jadi, pertama, kita pilih salah satu baris atau kolom matriks A untuk mendapatkan nilai determinannya. Misalnya, kita pilih baris ke-1. Elemen-elemen matriks baris ke-1, yaitu a_{11}, a_{12}, dan a_{13}.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{4 \quad 2 \quad 8} \\ 2 \quad 1 \quad 5 \\ 3 \quad 2 \quad 4 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya, karena kita pilih elemen-elemen pada baris ke-1, rumus determinan matriks yang kita gunakan adalah sebagai berikut:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot C_{ij}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} \cdot C_{ij} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$$

Langkah kedua, kita cari kofaktor matriks bagian dari matriks A (C_{ij}). $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dan M_{ij} = det A_{ij} dengan A_{ij} merupakan matriks bagian dari matriks A yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Maksudnya bagaimana? Oke, coba kamu perhatikan baik-baik ya.

Sebelumnya, kita telah memilih elemen-elemen pada baris ke-1, yaitu a_{11}, a_{12}, dan a_{13}. Oleh karena itu, matriks bagian dari matriks A nya adalah A_{11}, A_{12}, dan A_{13}.

- A_{11} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-1.

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{12} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-2.

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

- A_{13} diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen pada baris ke-1 dan kolom ke-3.

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad maka \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Rumus Determinan Matriks dengan Ekspansi Kofaktor

- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-*i*
  det (A) = $a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$
- Menghitung det (A) dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-*j*
  det (A) = $a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_{ij}$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13} \\ &= 4 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (4 - 10) - 2 \cdot (8 - 15) + 8 \cdot (4 - 3) \\ &= -24 + 14 + 8 = -2\end{aligned}$$

CONTOH:

- Hitunglah semua minor dan kofaktor matriks berikut ini:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$M_{11}=$ Det $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $= 10$ $C_{11}= (-1)^{1+1}\,10 = 10$

$M_{12}=$ Det $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $= 5$ $C_{12}= (-1)^{1+2}\ 5 = -5$

$M_{13}=$ Det $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ $= -4$ $C_{13}= (-1)^{1+3}\,-4 = -4$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$C_{21}=$? 0

$C_{22}=$? 15

$C_{23}=$? -12

$C_{31}=$? 0

$C_{32}=$? 0

$C_{33}=$? 6